

Билеты письменных вступительных экзаменов в МФТИ
(2000 г.): Методические разработки по физике и математи-
ке. — М.: МФТИ, 2000. — 46 с.

ISBN 5-7417-0166-3

Приведены задания, предлагавшиеся на вступительных экзаменах абитуриентам Московского физико-технического института в 2000 году. Все задачи снабжены ответами, часть — подробными решениями, некоторые — основными указаниями к решению. На выполнение каждой экзаменационной работы давалось 4,5 часа.

Для абитуриентов МФТИ и других физических вузов, а также преподавателей школ с углубленным изучением физики и математики.

УДК 53(075)
ББК 22.3

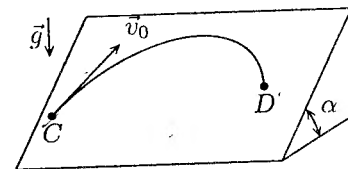
ISBN-5-7417-0166-3

© Московский физико-технический институт
(государственный университет), 2000
© Коллектив авторов, 2000

Ф И З И К А

БИЛЕТ 1

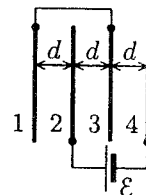
1. Монета скользит по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α и имеет в точке C скорость v_0 (см. рис.). Через некоторое время монета оказалась в точке D наклонной плоскости, пройдя путь S и поднявшись по вертикали на высоту H . Коэффициент трения скольжения между монетой и наклонной плоскостью μ . Найти скорость монеты в точке D .



к задаче 1

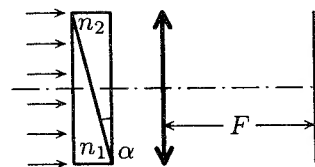
2. В вертикально расположенной тонкой трубке длиной $3L = 840$ мм с открытым в атмосферу верхним концом, столбиком ртути длиной $L = 280$ мм заперт слой воздуха длиной L . Какой максимальной длины слой ртути можно долить сверху в трубку, чтобы она из трубки не выливалась? Внешнее давление $P_0 = 770$ мм рт. ст.

3. Сложный воздушный конденсатор состоит из четырех пластин, удерживаемых на равных расстояниях d друг от друга. Пластины 1 и 3 закорочены. Пластины 2 и 4 подсоединены к источнику с ЭДС \mathcal{E} . Определить силу, действующую со стороны электрического поля на пластину 3. Площадь каждой пластины — S , а расстояние между ними много меньше размеров пластин.



к задаче 3

4. Плоскопараллельная пластина составлена из двух стеклянных клиньев с малым углом $\alpha = 5^\circ$. Показатель преломления клиньев $n_1 = 1,48$, $n_2 = 1,68$. На пластину нормально ее поверхности падает параллельный



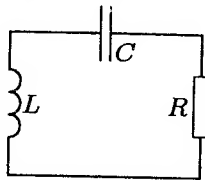
к задаче 4

пучок света. За пластиной расположена собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 60$ см. На экране, расположенном в фокальной плоскости линзы, наблюдается светлая точка. На

сколько сместится эта точка на экране, если убрать пластинку?

У к а з а н и е: для малых углов x справедливо $\sin x \approx x$.

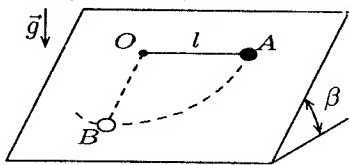
5. Для поддержания незатухающих колебаний в контуре с малым затуханием, изображенном на рисунке, индуктивность катушки быстро (по сравнению с периодом колебаний в контуре) увеличивают на небольшую величину ΔL ($\Delta L \ll L$) каждый раз, когда ток в цепи равен нулю, а через время, равное четверти периода колебаний, также быстро возвращают в исходное состояние. Определить величину ΔL , если $L = 0,15$ Гн, $C = 1,5 \cdot 10^{-7}$ Ф, $R = 20$ Ом.



к задаче 5

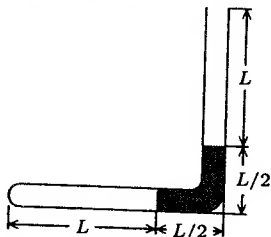
БИЛЕТ 2

1. Небольшая шайба на нити длиной l может вращаться вокруг неподвижной оси O , скользя по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту β . Шайбу поместили в точку A наклонной плоскости, соответствующую горизонтальному положению нити, и отпустили. Определить скорость шайбы в точке B — самой низкой точке траектории. Коэффициент трения скольжения шайбы о наклонную плоскость μ . Нить всегда параллельна наклонной плоскости и не задевает ее.



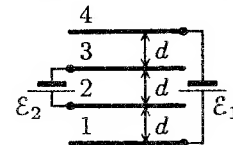
к задаче 1

2. Имеется Г-образная тонкая трубка постоянного внутреннего сечения и общей длиной $3L = 1260$ мм. Между слоем воздуха длиной $L = 420$ мм и атмосферой находится слой ртути той же длины L (см. рис.). Какой длины слой ртути останется в трубке, если вертикальное колено повернуть на 180° , расположив его открытым концом вниз? Внешнее давление $P_0 = 735$ мм рт. ст.



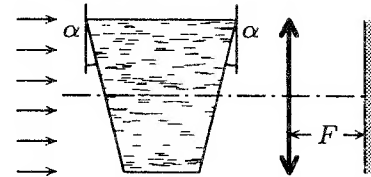
к задаче 2

3. Четыре проводящие пластины удерживают напротив друг друга. Расстояние между соседними пластинами d . Пластины 1 и 4 подсоединены к источнику с ЭДС \mathcal{E}_1 , пластины 2 и 3 подсоединены к источнику с ЭДС \mathcal{E}_2 . Определить силу, действующую на пластину 2 со стороны электрического поля. Площадь каждой пластины S , а расстояние между ними много меньше размеров пластин.



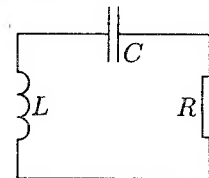
к задаче 3

4. Стекланный трапециевидный сосуд с малым углом $\alpha = 6^\circ$ заполнен водой с показателем преломления $n = 1,33$. На сосуд падает параллельный пучок света. За сосудом расположена собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 50$ см. На экране, расположенном в фокальной плоскости линзы, наблюдается светлая точка. На сколько сместится эта точка на экране, если убрать сосуд? У к а з а н и е: для малых углов x справедливо $\sin x \approx x$.



к задаче 4

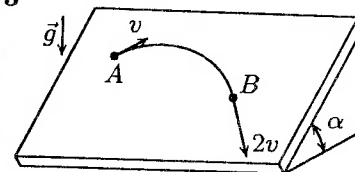
5. Для поддержания незатухающих колебаний в контуре с малым затуханием, изображенном на рисунке, емкость конденсатора быстро (по сравнению с периодом колебаний в контуре) увеличивают на небольшую величину ΔC ($\Delta C \ll C$) каждый раз, когда напряжение на нем равно нулю, а через время, равное четверти периода колебаний, также быстро возвращают в исходное состояние. Определить величину ΔC , если $L = 0,1$ Гн, $C = 10^{-7}$ Ф, $R = 30$ Ом.



к задаче 5

БИЛЕТ 3

1. Широкая доска наклонена под углом α к горизонту (см. рис.). Небольшой шайбе сообщили в точке A доски скорость v , направленную вдоль нее. Через некоторое

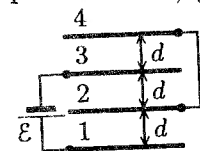


к задаче 1

время шайба оказалась в точке B , сместившись по вертикали на H вниз и имея скорость $2v$. Какой путь прошла шайба между точками A и B ? Коэффициент трения скольжения шайбы о доску μ .

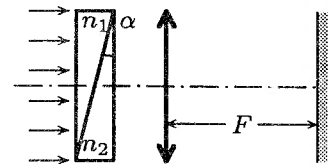
2. В вертикально расположенной трубке постоянного внутреннего сечения и длиной $3L = 1080$ мм с открытым в атмосферу верхним концом, столбиком ртути длиной $L = 360$ мм заперт слой воздуха тоже длиной L . Какой длины столб ртути останется в трубке, если ее перевернуть открытым концом вниз? Внешнее давление $P_0 = 774$ мм рт. ст.

3. Сложный воздушный конденсатор состоит из четырех пластин, удерживаемых неподвижно. Расстояние между соседними пластинами d . Пластины 2 и 4 закорочены. Пластины 1 и 3 подсоединены к источнику с ЭДС \mathcal{E} . Определить силу, действующую на пластину 3 со стороны электрического поля. Площадь каждой пластины S , а расстояние между ними много меньше размеров пластин.

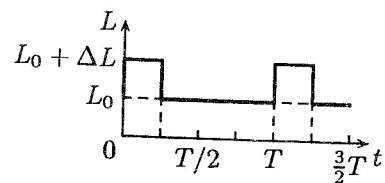


к задаче 3

4. Плоскопараллельная пластинка составлена из двух стеклянных клиньев с малым углом α . Показатели преломления



к задаче 4



к задаче 5

клиньев $n_1 = 1,53$, $n_2 = 1,73$. На пластинку нормально ее поверхности падает параллельный пучок света. За пластинкой расположена собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 50$ см. На экране, расположенном в фокальной плоскости линзы, наблюдается светлая точка. Если убрать пластинку, то эта точка смещается на экране на $H = 10$ мм. Определить величину угла α .

У к а з а н и е: для малых углов x справедливо $\sin x \approx x$.

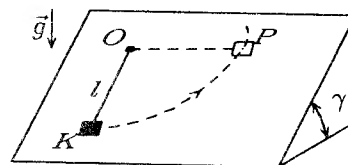
5. Для поддержания незатухающих колебаний тока в колебательном LCR контуре с периодом колебаний $T = 10^{-3}$ с ин-

дуктивность L контура периодически изменяют во времени по закону, представленному на рисунке ($\Delta L/L_0 \ll 1$). При каком максимальном значении сопротивления R колебания в контуре не будут затухать, если $\Delta L = 3 \cdot 10^{-2}$ Гн?

У к а з а н и е: уменьшение индуктивности происходит при максимальном токе в контуре.

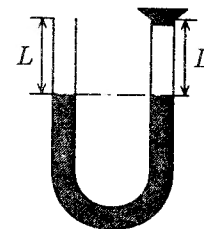
БИЛЕТ 4

1. На нити длиной l вокруг неподвижной оси O может вращаться небольшой брусок, скользя по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту γ (см. рис.). Брусок поместили в самую низкую для него точку K (нить наклонена под углом γ к горизонту). Какую скорость надо сообщить бруску в точке K , вдоль наклонной плоскости и перпендикулярно нити, чтобы он достиг точки P (при горизонтальном положении нити), имея вдвое меньшую скорость? Коэффициент трения скольжения бруска о наклонную плоскость μ . Нить всегда параллельна наклонной плоскости и не задевает ее.



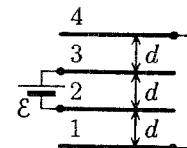
к задаче 1

2. U-образная тонкая трубка постоянного внутреннего сечения с вертикально расположенными коленами заполняется ртутью так, что в каждом из открытых колен остается слой воздуха длиной $L = 320$ мм (см. рис.). Затем правое колено закрывается пробкой. Какой максимальной длины слой ртути можно долить в левое колено, чтобы она не выливалась из трубки? Внешнее давление $P_0 = 720$ мм рт. ст.



к задаче 2

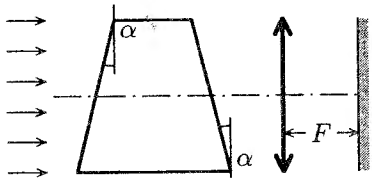
3. Сложный воздушный конденсатор состоит из четырех пластин, удерживаемых неподвижно. Расстояние между соседними пластинами d . Пластины 1 и 4 закорочены. Пластины 2 и 3 подсоединены к источнику с ЭДС \mathcal{E} . Опре-



к задаче 3

делить силу, действующую на пластину 4 со стороны электрического поля. Площадь каждой пластины S , а расстояние между ними много меньше размеров пластин.

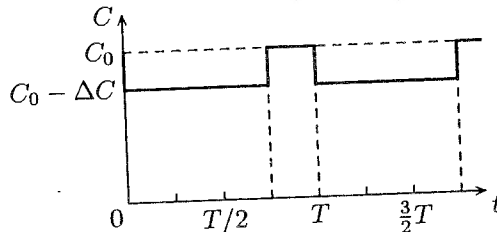
4. На стеклянный трапециевидальный сосуд с углом наклона $\alpha = 6^\circ$ падает параллельный пучок света. За сосудом расположена собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 45$ см. На экране, находящемся в фокальной плоскости линзы, наблюдается светлая точка. После заполнения сосуда глицерином светлая точка смещается на экране на $H = 44,3$ мм. Определить показатель преломления глицерина.



к задаче 4

У к а з а н и е: для малых углов x справедливо $\sin x \approx x$.

5. Для поддержания незатухающих колебаний в колебательном LCR контуре с периодом колебаний $T = 2 \cdot 10^{-4}$ с емкость C контура периодически изменяют во времени по закону, представленному на рисунке ($\Delta C/C_0 \ll 1$). При каком максимальном значении сопротивления R колебания в контуре не



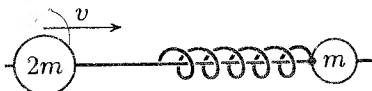
к задаче 5

будут затухать, если $L = 8 \cdot 10^{-2}$ Гн, $\Delta C/C_0 = 8 \cdot 10^{-2}$.

У к а з а н и е: уменьшение емкости конденсатора происходит при максимальном заряде на конденсаторе.

БИЛЕТ 5

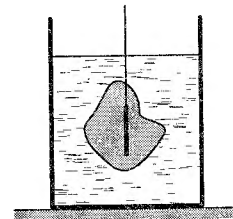
1. Шары насажены на прямолинейную горизонтальную спицу и могут скользить по ней без трения (см. рис.). К шару массой m прикреплена легкая пружина жесткостью K и он покоится. Шар массой $2m$ движется со скоростью v . Радиусы шаров



к задаче 1

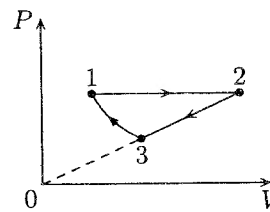
много меньше длины пружины. 1. Определить скорость шара массой $2m$ после отрыва от пружины. 2. Определить время контакта шара массой $2m$ с пружиной.

2. В цилиндрическом стакане с водой на нити висит проволока, вмороженная в кусок льда. Лед с проволокой целиком погружен в воду и не касается стенок и дна стакана (см. рис.). После того как лед растаял, проволока осталась висеть на нити, целиком погруженная в воду. Уровень воды в стакане за время таяния льда уменьшился на ΔH ($\Delta H > 0$), а сила натяжения нити увеличилась в K раз. Найти объем проволоки. Плотность воды ρ_v , проволоки — ρ , площадь внутреннего сечения стакана S .



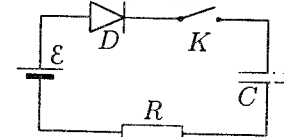
к задаче 2

3. Газообразный гелий находится в цилиндре под подвижным поршнем. Газ нагревают при постоянном давлении, переводя его из состояния 1 в состояние 2 (см. рис.). При этом газ совершает работу A_{12} . Затем газ сжимается в процессе 2–3, когда его давление P прямо пропорционально объему V . При этом над газом совершается работа A_{23} ($A_{23} > 0$). Наконец, газ сжимается в адиабатическом процессе 3–1, возвращаясь в первоначальное состояние. Найти работу сжатия A_{31} , совершенную над газом в адиабатическом процессе.



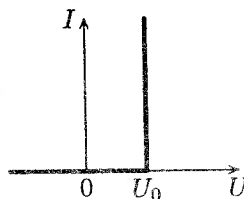
к задаче 3

4. В схеме, изображенной на рисунке, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор емкостью $C = 100$ мкФ не заряжен.



к задаче 4

Вольтамперная характеристика диода D изображена на следующем рисунке. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 6$ В, пороговое напряжение диода $U_0 = 1$ В, $R = 1$ кОм. 1. Чему равен ток в цепи сразу после замыкания ключа? 2. Какой заряд протечет через диод после замыкания ключа?



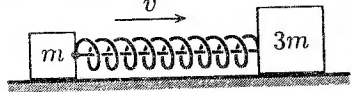
к задаче 4

3. Какое количество теплоты выделится на резисторе R после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

5. Точечный источник света расположен на главной оптической оси слева от линзы с фокусным расстоянием $F_1 = -10$ см. Расстояние от источника до рассеивающей линзы $d = 40$ см. На расстоянии $L = 20$ см слева от рассеивающей линзы расположена собирающая линза. Главные оптические оси линз совпадают. Найти фокусное расстояние собирающей линзы, если из системы линз выходит параллельный пучок света.

БИЛЕТ 6

1. По гладкой горизонтальной поверхности стола движутся с постоянной скоростью v два бруска массами m и $3m$, связанные нитью. Между брусками находится пружина жесткостью K , сжатая на величину X_0 (см. рис.). Пружина прикреплена

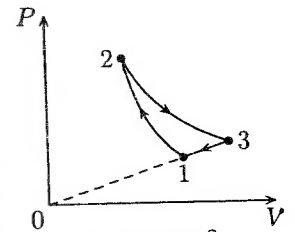


к задаче 1

только к бруску массой m . Размеры брусков малы по сравнению с длиной нити, массой пружины пренебречь, скорость брусков направлена вдоль нити. Во время движения нить обрывается и бруски разъезжаются вдоль начального направления нити. 1. Найти скорость бруска массой $3m$ после его отделения от пружины. 2. Найти время соприкосновения пружины с бруском массой $3m$, считая от момента разрыва нити.

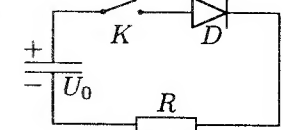
2. Гайка, вмороженная в кусок льда, висит на нити. После того как снизу поднесли цилиндрический стакан с водой, в которую целиком погрузили лед с гайкой, сила натяжения нити уменьшилось на ΔT ($\Delta T > 0$), а уровень воды в стакане повысился. Лед с гайкой при этом висит на нити в воде и не касается стенок и дна стакана. После того как лед растаял, гайка осталась висеть на нити, целиком погруженная в воду, а уровень воды в стакане за время таяния льда понизился на ΔH ($\Delta H > 0$). Чему равен объем гайки? Плотность воды $\rho_в$, льда — $\rho_л$, площадь внутреннего сечения стакана S , ускорение свободного падения g .

3. Газообразный гелий находится в цилиндре под подвижным поршнем. Газ сжимают в адиабатическом процессе, переводя его из состояния 1 в состояние 2 (см. рис.). Над газом совершается при этом работа сжатия A_{12} ($A_{12} > 0$). Затем газ расширяется в изотермическом процессе 2–3, и, наконец, из состояния 3 газ переводят в состояние 1 в процессе, когда его давление P прямо пропорционально объему V . Найти работу A_{23} , которую совершил газ в процессе изотермического расширения, если во всем замкнутом цикле 1–2–3–1 он совершил работу A .



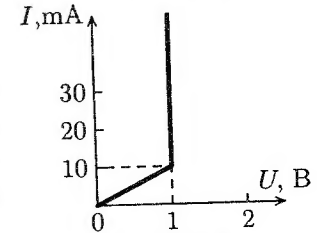
к задаче 3

4. В схеме, изображенной на рисунке, конденсатор емкостью $C = 100$ мкФ, заряженный до напряжения $U_0 = 5$ В, подключается через диод D к резистору с сопротивлением $R = 100$ Ом.



к задаче 4

Вольтамперная характеристика диода изображена на следующем рисунке. В начальный момент ключ K разомкнут. Затем ключ замыкают. 1. Чему равен ток в цепи сразу после замыкания ключа? 2. Чему равно напряжение на конденсаторе, когда ток в цепи будет равен 10 мА? 3. Какое количество теплоты выделится на диоде после замыкания ключа?

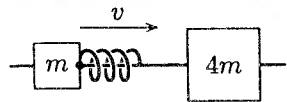


к задаче 4

5. Точечный источник света находится на главной оптической оси тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = -30$ см слева от нее на расстоянии $d = 70$ см. На каком расстоянии от рассеивающей линзы надо поместить справа от нее тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием $F_2 = 50$ см, чтобы из системы выходил параллельный пучок света? Главные оптические оси линз совпадают.

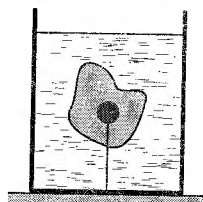
БИЛЕТ 7

1. Вдоль прямолинейной горизонтальной спицы могут скользить без трения две муфты. Муфта массой m с прикрепленной к ней легкой пружиной жесткостью K движется со скоростью v (см. рис.). Муфта массой $4m$ покоится. Размеры муфт намного меньше длины пружины. 1. Определить скорость муфты массой $4m$ после отрыва от пружины. 2. Определить время контакта муфты массой $4m$ с пружиной.



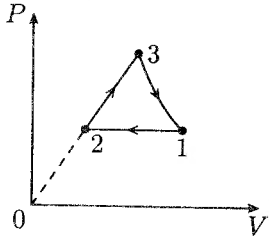
к задаче 1

2. Деревянный шарик, замороженный в кусок льда, удерживается внутри цилиндрического стакана с водой нитью, прикрепленной ко дну (см. рис.). Лед с шариком целиком погружен в воду и не касается стенок и дна стакана. После того как лед растаял, шарик остался плавать внутри стакана, целиком погруженный в воду. Сила натяжения нити за время таяния льда уменьшилась при этом в K раз ($K > 1$), а уровень воды в стакане уменьшился на ΔH ($\Delta H > 0$). Чему равен объем шарика, если плотность воды равна ρ_v , дерева — ρ ($\rho < \rho_v$), площадь внутреннего сечения стакана S .



к задаче 2

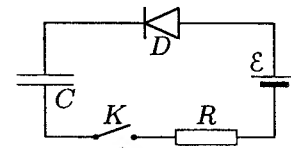
3. Газообразный гелий находится в цилиндре под подвижным поршнем. Газ охлаждают при постоянном давлении, переводя его из состояния 1 в состояние 2 (см. рис.). При этом от газа отводится количество теплоты Q ($Q > 0$). Затем газ расширяется в процессе 2-3, когда его давление P прямо пропорционально объему V , совершая работу A_{23} . Наконец, газ расширяется в адиабатическом процессе 3-1. Найти работу A_{31} , совершенную газом в процессе адиабатического расширения.



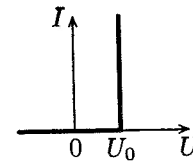
к задаче 3

4. В схеме, изображенной на рисунке, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор C не заряжен. Вольт-

амперная характеристика диода D изображена на следующем рисунке. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 3$ В, пороговое напряжение диода $U_0 = 1$ В, $R = 2$ кОм. Ключ K замыкают. В установившемся режиме ток в цепи равен нулю. 1. Чему равен ток в цепи сразу после замыкания ключа? 2. Чему равна емкость конденсатора C , если известно, что после замыкания ключа через диод протек заряд $q = 4 \cdot 10^{-4}$ Кл? 3. Какое количество теплоты выделится на резисторе R после замыкания ключа. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.



к задаче 4

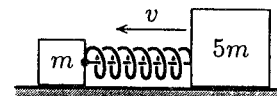


к задаче 4

5. На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 20$ см слева от линзы помещен точечный источник света на расстоянии $d = 30$ см от линзы. На каком расстоянии от собирающей линзы надо поместить справа от нее тонкую рассеивающую линзу с фокусным расстоянием $F_2 = -10$ см, чтобы из системы линз вышел параллельный пучок света? Главные оптические оси линз совпадают.

БИЛЕТ 8

1. Бруски с массами m и $5m$ связаны нитью, длина которой много больше размеров брусков. Между брусками вставлена сжатая на величину X_0 и прикрепленная только к бруску массой $5m$ легкая пружина жесткостью K (см. рис.). Система движется по гладкой горизонтальной поверхности стола вдоль горизонтально натянутой нити со скоростью v . Нить разрывается, и бруски разъезжаются вдоль начального направления нити. 1. Найти скорость бруска массой m после его отделения от пружины. 2. Найти время соприкосновения бруска массой m с пружиной, считая от момента разрыва нити.

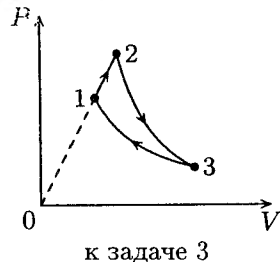


к задаче 1

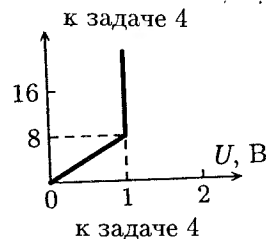
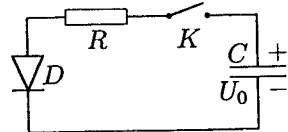
2. Болт, замороженный в кусок льда, висит на нити. После того как снизу поднесли цилиндрический стакан с водой,

в которую целиком погрузили лед с болтом, сила натяжения нити уменьшилось на ΔT ($\Delta T > 0$). При этом лед с болтом не касались дна и стенок стакана. Спустя некоторое время лед растаял, а болт остался висеть на нити, целиком погруженный в воду. При этом уровень воды в стакане увеличился на ΔH по сравнению с уровнем воды в стакане до опускания в него льда с болтом. Найти объем болта. Плотность воды ρ_v , льда — ρ_l , площадь внутреннего сечения стакана S , ускорение свободного падения g .

3. Газообразный гелий находится в цилиндре под подвижным поршнем. Газ расширяется в процессе 1–2, когда его давление P прямо пропорционально объему V (см. рис.). Затем газ расширяется в адиабатическом процессе 2–3, совершая работу A_{23} . Наконец газ сжимается в изотермическом процессе 3–1, при этом от него отводится количество теплоты Q_{31} ($Q_{31} > 0$). Какую работу совершил газ во всем замкнутом цикле 1–2–3–1?



4. В схеме, изображенной на рисунке, в начальный момент ключ K разомкнут, а конденсатор C заряжен до напряжения $U_0 = 6$ В. Вольтамперная характеристика диода D изображена на следующем рисунке. Сопротивление резистора $R = 125$ Ом. Ключ K замыкают.



1. Чему равен ток в цепи сразу после замыкания ключа? 2. Чему равно напряжение на конденсаторе, когда ток в цепи равен $I_1 = 8$ мА? 3. Чему равна емкость конденсатора, если известно, что после замыкания ключа на диоде выделилось количество теплоты $Q =$

$$= 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж?}$$

5. На главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = 30$ см слева от нее помещен

точечный источник света на расстоянии $d = 50$ см от линзы. Между источником и собирающей линзой помещают рассеивающую линзу. Расстояние между линзами $L = 20$ см. Главные оптические оси линз совпадают. Найти фокусное расстояние рассеивающей линзы, если известно, что из системы линз вышел параллельный пучок света.

МАТЕМАТИКА

БИЛЕТ 1

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} - 2xy = 16, \\ \frac{y^3}{2x} + 3xy = 25. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 7x}{\sin^2 x} = 16 \cos 4x(1 + 2 \cos 4x) + \frac{\cos^2 7x}{\cos^2 x}.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{|\log_2 2x| - 2} \leq \frac{1}{|\log_4 x^2| - 1}.$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вершины A , B и точка пересечения высот треугольника E лежат на окружности, которая пересекает отрезок BC в точке D . Найти радиус окружности, если $CD = 4$, $BD = 5$.

5. Найти все значения
- a
- , при которых уравнение

$$\log_{4x}(1 + ax) = \frac{1}{2}$$

имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 12, $\angle ADB = 2 \arctg(3/4)$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1 , а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1 . Найти:

- 1) объем пирамиды $A_1B_1C_1D$;
- 2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC .

БИЛЕТ 2

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^4}{y^2} + xy = 72, \\ \frac{y^4}{x^2} + xy = 9. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 9x}{\sin^2 x} = 16 \operatorname{ctg} 2x \sin 10x + \frac{\cos^2 9x}{\cos^2 x}.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{|\log_2(x/2)| - 3} \leq \frac{1}{|\log_8 x^3| - 2}.$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вершины A , B и точка пересечения высот треугольника E лежат на окружности, которая пересекает отрезок BC в точке D . Найти длину отрезка CD , если $\angle ABC = 2 \arcsin(1/5)$, а радиус окружности $R = 5$.

5. Найти все значения
- a
- , при которых уравнение

$$\log_{2x}(1 - ax) = \frac{1}{2}$$

имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 6, угол между боковыми гранями равен $\arccos(1/10)$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1 , а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1 . Найти:

- 1) объем пирамиды $A_1B_1C_1D$;
- 2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC .

БИЛЕТ 3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^3}{2y} + 3xy = 25, \\ \frac{y^3}{x} - 2xy = 16. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 5x}{\sin^2 x} = 24 \cos 2x + \frac{\cos^2 5x}{\cos^2 x}.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{|\log_3 9x| - 3} \leq \frac{1}{|\log_9 x^2| - 1}.$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вершины A , B и точка пересечения высот треугольника E лежат на окружности, которая пересекает отрезок BC в точке D . Найти радиус окружности, если $AC = 3$, $CD = 2$.

5. Найти все значения a , при которых уравнение

$$\log_{9x}(1 + ax) = \frac{1}{2}$$

имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 3, угол между основанием и боковой гранью равен $\arccos(\sqrt{3}/4)$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1 , а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1 . Найти:

- 1) объем пирамиды $A_1B_1C_1D$;
- 2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC .

БИЛЕТ 4

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y^2} + \frac{3y}{4x} = 2, \\ \frac{8y}{x^2} - \frac{6x}{y} = 5. \end{cases}$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin^2 3x}{\sin^2 x} = 8 \cos 4x + \frac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{1}{|\log_{27} x^3| - 2} \leq \frac{1}{|\log_3(x/3)| - 1}.$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вершины A , B и точка пересечения высот треугольника E лежат на окружности, которая пересекает отрезок BC в точке D .

Найти радиус окружности, если $\angle ABC = 2 \arctg(\sqrt{2}/4)$, $CD = 8$.

5. Найти все значения a , при которых уравнение

$$\log_{x-1}(x - a) = \frac{1}{2}$$

имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 12, высота пирамиды $DO = \sqrt{33}$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1 , а в треугольнике BCD проведены медиана BC_1 и высота CB_1 . Найти:

- 1) объем пирамиды $A_1B_1C_1D$;
- 2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC .

БИЛЕТ 5

1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2 + x + 6}}{|x^2 - 7x + 6| - |x^2 - x - x|} \geq 0.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin x}{\cos 2x \cos 3x} + \frac{\sin x}{\cos 3x \cos 4x} = \sin 4x - \operatorname{tg} 2x.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \log_3^2(x + 2y) = \log_{\frac{1}{3}}(x + 2y) \log_{\frac{1}{3}}(x - y) + \log_3^2(x - y), \\ x^2 + xy - 2y^2 = 9. \end{cases}$$

4. Окружности C_1 и C_2 внешне касаются в точке A . Прямая l касается окружности C_1 в точке B , а окружности C_2 — в точке D . Через точку A проведены две прямые: одна проходит через точку B и пересекает окружность C_2 в точке F , а другая касается окружностей C_1 и C_2 и пересекает прямую l в точке E . Найти радиусы окружностей C_1 и C_2 , если $AF = 3\sqrt{2}$, $BE = \sqrt{5}$.

5. Найти все значения a , при которых уравнение $\sqrt{x - 9} = ax + 7a - 3$ имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ угол ADC равен $2 \arcsin\left(\frac{1}{6}\right)$, сторона основания ABC равна 2. Точки K , M , N — середины ребер AB , CD , AC соответственно. Точка E лежит на отрезке KM и $3ME = KE$. Через точку E проходит плоскость \mathcal{P} перпендикулярно отрезку KM . В каком отношении плоскость \mathcal{P} делит ребра пирамиды? Найти площадь сечения пирамиды плоскостью \mathcal{P} и расстояние от точки N до плоскости \mathcal{P} .

БИЛЕТ 6

1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2 + 7x - 6}}{|x^2 - 6x + 5| - |x^2 - 2x - 3|} \leq 0.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos 2x \cos 5x} + \frac{\sin 3x}{\cos 5x \cos 8x} = \sin 8x - \operatorname{tg} 2x.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2^2(x+y) + \log_{\frac{1}{2}}(x+y) \log_{\frac{1}{2}}(x-2y) = 2 \log_2^2(x-2y), \\ x^2 - xy - 2y^2 = 4. \end{cases}$$

4. Окружности C_1 и C_2 внешне касаются в точке A . Прямая l касается окружности C_1 в точке B , а окружности C_2 — в точке D . Через точку A проведены две прямые: одна проходит через точку B и пересекает окружность C_2 в точке E , а другая касается окружностей C_1 и C_2 и пересекает l в точке F . Найти радиусы окружностей C_1 и C_2 , если $AB = 4$, $EF = \sqrt{10}$.

5. Найти все значения a , при которых уравнение $\sqrt{x-9} = 3 - ax - 7a$ имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ угол ADB равен $2 \arcsin\left(\frac{1}{3}\right)$, сторона основания ABC равна 2. Точки K , M , N — середины отрезков AB , DK , AC соответственно. Точка E лежит на отрезке CM и $3ME = CE$. Через точку E проходит плоскость \mathcal{P} перпендикулярно отрезку CM . В каком отношении плоскость \mathcal{P} делит ребра пирамиды? Найти площадь сечения

пирамиды плоскостью \mathcal{P} и расстояние от точки N до плоскости \mathcal{P} .

БИЛЕТ 7

1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2 - 6x - 5}}{|x^2 + x - 2| - |x^2 + 7x + 6|} \geq 0.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin x}{\cos 6x \cos 7x} + \frac{\sin x}{\cos 7x \cos 8x} = \sin 8x - \operatorname{tg} 6x.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3^2(x+2y) + \log_{\frac{1}{3}}(x+2y) \log_{\frac{1}{3}}(x-y) = 2 \log_3^2(x-y), \\ x^2 + xy - 2y^2 = 4. \end{cases}$$

4. Окружности C_1 и C_2 внешне касаются в точке A . Прямая l касается окружности C_1 в точке B , а окружности C_2 — в точке D . Через точку A проведены две прямые: одна проходит через точку B и пересекает окружность C_2 в точке F , а другая касается окружностей C_1 и C_2 и пересекает прямую l в точке E . Найти радиусы окружностей C_1 и C_2 , если $AE = 3$, $AF = 4\sqrt{3}$.

5. Найти все значения a , при которых уравнение $\sqrt{x-8} = ax - 3a - 2$ имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ длина бокового ребра равна 12, а угол между основанием ABC и боковой гранью равен $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{105}}\right)$. Точки K , M , N — середины ребер AB , CD , AC соответственно. Точка E лежит на отрезке KM и $2ME = KE$. Через точку E проходит плоскость \mathcal{P} перпендикулярно отрезку KM . В каком отношении плоскость \mathcal{P} делит ребра пирамиды? Найти площадь сечения пирамиды плоскостью \mathcal{P} и расстояние от точки N до плоскости \mathcal{P} .

БИЛЕТ 8

1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}}{|x^2 + 2x - 3| - |x^2 + 6x + 5|} \leq 0.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin x}{\cos 4x \cos 5x} + \frac{\sin x}{\cos 5x \cos 6x} = \sin 6x - \operatorname{tg} 4x.$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2 \log_2^2(x + y) = \log_{\frac{1}{2}}(x + y) \log_{\frac{1}{2}}(x - 2y) + \log_2^2(x - 2y), \\ x^2 - xy - 2y^2 = 9. \end{cases}$$

4. Окружности C_1 и C_2 внешне касаются в точке A . Прямая l касается окружности C_1 в точке B , а окружности C_2 — в точке D . Через точку A проведены две прямые: одна проходит через точку B и пересекает окружность C_2 в точке E , а другая касается окружностей C_1 и C_2 и пересекает l в точке F . Найти радиусы окружностей C_1 и C_2 , если $AE = 1$, $EF = 3/\sqrt{2}$.

5. Найти все значения a , при которых уравнение $\sqrt{x - 8} = -ax + 3a + 2$ имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 4, угол между плоскостью основания и боковой гранью равен $\arccos\left(\frac{1}{2\sqrt{6}}\right)$. Точки K , M , N — середины отрезков AB , DK , AC соответственно. Точка E лежит на отрезке CM и $5ME = CE$. Через точку E проходит плоскость \mathcal{P} перпендикулярно отрезку CM . В каком отношении плоскость \mathcal{P} делит ребра пирамиды? Найти площадь сечения пирамиды плоскостью \mathcal{P} и расстояние от точки N до плоскости \mathcal{P} .

ФИЗИКА

БИЛЕТ 1

1. Рассмотрим силы, действующие на монету при ее движении по наклонной плоскости. Это — сила \overrightarrow{mg} , направленная вертикально вниз, \overrightarrow{N} — сила реакции, перпендикулярная наклонной плоскости и $\overrightarrow{F}_{\text{тр}}$ — сила трения, лежащая на этой плоскости и в любой момент времени направленная в сторону, противоположную скорости движения монеты \vec{v} . Сила реакции

$$N = mg \cos \alpha$$

и работы не совершает. Запишем закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -mgH - \mu mg \cos \alpha \cdot S.$$

Здесь $A = \mu mg \cos \alpha \cdot S$ — работа против силы трения. Отсюда

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2g(H + \mu S \cos \alpha)}.$$

2. Ясно, что при доливании ртути сверху в пробирку столбик ртути сожмет запертый воздух на величину x . Тогда количество долитой в пробирку ртути равно $L + x$, а длина воздушного столбика равна $L - x$. Так как температура во время опыта не изменилась, то согласно закону Бойля–Мариотта

$$P_{\text{в}0}LS = P_{\text{в}1}(L - x)S,$$

где $P_{\text{в}0,1}$ — давления в воздушной пробке до и после эксперимента, а S — площадь сечения пробирки. Если P_0 — внешнее атмосферное давление, то

$$P_{\text{в}0} = P_0 + \rho g L \quad \text{и} \quad P_{\text{в}1} = P_0 + \rho g(2L + x).$$

Будем решать полученное уравнение в мм рт. ст. Тогда $P_0 = 11/4L$, а

$$P_{\text{в}0} = P_0 + L \quad \text{и} \quad P_{\text{в}1} = P_0 + (2L + x).$$

Подставляя $P_{\text{в}0}$ и $P_{\text{в}1}$ в исходное уравнение, получим

$$(P_0 + L)L = (P_0 + 2L + x)(L - x).$$

Отсюда

$$x = \frac{1}{4}L = 70 \text{ мм}.$$

Окончательно для длины столбика ртути, долитой в пробирку

находим

$$L + x = 350 \text{ мм.}$$

3. Из закона сохранения заряда следует, что суммарный заряд пластин 1, 3 и пластин 2, 4 равен нулю:

$$q_1 + q_3 = 0; \quad q_2 + q_4 = 0.$$

Отсюда

$$q_3 = -q_1 \quad \text{и} \quad q_4 = -q_2.$$

Обозначим через E_1 и E_2 — напряженности электрических полей, создаваемых зарядами пластин 1, 3 и 2, 4, которые равны

$$E_1 = \frac{q_1}{S\varepsilon_0} \quad \text{и} \quad E_2 = \frac{q_2}{S\varepsilon_0}.$$

Разность потенциалов между пластинами 1, 3 равна нулю, а между пластинами 2, 4 — \mathcal{E} (\mathcal{E} — ЭДС батареи). Согласно принципу суперпозиции электрических полей

$$E_1 d + (E_1 + E_2)d = 0; \quad E_2 d + (E_1 + E_2)d = \mathcal{E}.$$

Решая систему уравнений, находим

$$E_1 = -\frac{\mathcal{E}}{3d}; \quad E_2 = \frac{2\mathcal{E}}{3d}.$$

Заряд третьей пластины равен

$$q_3 = -\frac{\mathcal{E}S\varepsilon_0}{3d}.$$

Этот заряд находится в поле пластины 1, равном $\frac{E_1}{2}$, и поле, создаваемом пластинами 2, 4 — E_2 . Таким образом, сила, действующая на пластину 3, равна

$$F = q_3 \left(\frac{E_1}{2} + E_2 \right) = \frac{\mathcal{E}^2}{6d^2} S\varepsilon_0.$$

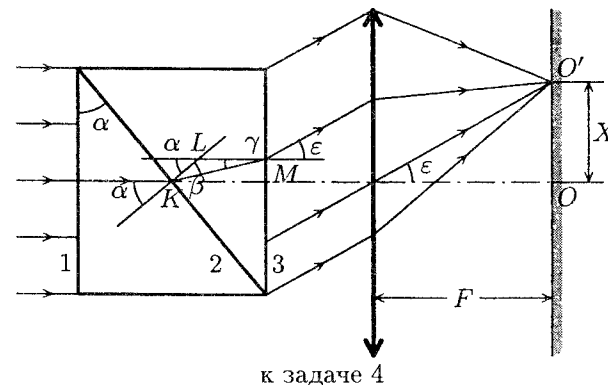
4. При нормальном падении лучей на границу 1 последние не изменяют своего направления. На границе 2 лучи преломляются так, что

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Принимая во внимание малость углов, имеем

$$\frac{\alpha}{\beta} \approx \frac{n_2}{n_1}.$$

При выходе из пластины (поверхность 3)



$$\frac{\sin \gamma}{\sin \varepsilon} = \frac{1}{n_2} \quad \text{или} \quad \frac{\gamma}{\varepsilon} \approx \frac{1}{n_2}$$

(см. рис.). Рассмотрим треугольник KLM . Ясно, что

$$\alpha = \gamma + \beta = \frac{\varepsilon}{n_2} + \alpha \frac{n_1}{n_2}.$$

Здесь ε — угол выхода лучей из пластины, равный

$$\varepsilon = \alpha(n_2 - n_1).$$

При наклонном падении на линзу параллельного пучка последний фокусируется в фокальной плоскости линзы в точке O' на расстоянии X от главной оптической оси линзы. Из геометрии рисунка видно, что

$$X = OO' = F \tan \varepsilon \approx F\varepsilon = F\alpha(n_2 - n_1) \approx 10,5 \text{ мм.}$$

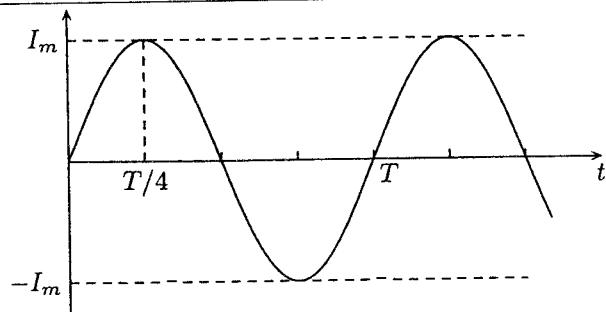
5. Так как сопротивление контура мало, то колебания, возникающие в контуре, можно считать почти синусоидальными, так что за период колебаний потери энергии достаточно малы. Тогда период колебаний определяется по формуле Томсона (см. рис.):

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Индуктивность изменяется через время $t = T/2 = \pi\sqrt{LC}$. При изменении индуктивности на величину ΔL в силу сохранения магнитного потока

$$I_T L = (L + \Delta L)I = \Phi.$$

Здесь I_T — амплитуда тока в контуре. Начальная энергия, за-



к задаче 5

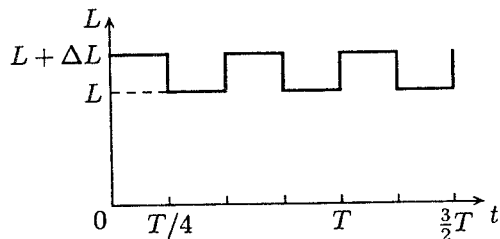
пасенная в контуре, равна

$$W_1 = \frac{\Phi^2}{2(L + \Delta L)},$$

где Φ — магнитный поток, пронизывающий катушку индуктивности. В момент уменьшения индуктивности на величину ΔL энергия, запасенная в катушке, увеличилась и равна

$$W_2 = \frac{\Phi^2}{2L}.$$

Изменение энергии равно



к задаче 5

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{\Phi^2}{2} \frac{\Delta L}{L(L + \Delta L)} \approx \frac{\Phi^2 \Delta L}{2L^2}.$$

За время $t = T/2$ в контуре происходят потери энергии, выделяющейся в виде тепла на резисторе с сопротивлением R , равные

$$W_{\text{потерь}} = I_{\text{эф}}^2 R \frac{T}{2}.$$

Для поддержания в контуре незатухающих колебаний требу-

ется скомпенсировать эти потери за счет увеличения энергии, запасенной в катушке индуктивности. Следовательно,

$$\Delta W \geq W_{\text{потерь}} \quad \text{или} \quad \frac{I_T^2 \Delta L}{2} \geq \frac{I_T^2 R \pi \sqrt{LC}}{2}.$$

Откуда

$$\Delta L \geq \pi R \sqrt{LC} \approx 9,4 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

БИЛЕТ 2

1. $v = \sqrt{gl(2 \sin \beta - \mu \pi \cos \beta)}.$
2. $x = \frac{3}{4} L = 315 \text{ мм}.$
3. $F = \frac{(3\varepsilon_2 - \varepsilon_1)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{8d^2} S \varepsilon_0.$
4. $\Delta x = 2\alpha(n - 1) = 3,45 \text{ см}.$
5. $\Delta C = \frac{\pi RC}{\sqrt{L/C}} \approx 9,4 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}.$

БИЛЕТ 3

1. $S = \frac{2gH - 3v^2}{2\mu g \cos \alpha}.$
2. $x = \frac{3L}{4} = 270 \text{ мм}.$
3. $F = 0.$
4. $\alpha = \frac{H}{(n_2 - n_1)F} = 0,1 \text{ рад}.$
5. $R \leq \frac{\Delta L}{T} = 30 \text{ Ом}.$

БИЛЕТ 4

1. $v = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{gl}{2}} (2 \sin \gamma + \mu \pi \cos \gamma).$
2. $x = 80 \text{ мм}, L + x = 400 \text{ мм}. (x^2 - \left(\frac{P_0}{\rho g} + 2L\right)x + L^2 = 0).$
3. $F = \frac{\varepsilon^2}{8d^2} S \varepsilon_0.$
4. $n = 1 + \frac{H}{2\alpha F} = 1,47.$
5. $R \leq LT \frac{\Delta C}{C_0} = 32 \text{ Ом}.$

БИЛЕТ 5

$$1. \quad 1) v_1 = \frac{v}{3}; \quad 2) t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{2m}{3K}}.$$

$$2. \quad v_{\pi} = \frac{k}{k-1} S \Delta H \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\pi} - \rho_{\text{в}}}.$$

$$3. \quad A_{31} = 3A_{23} - \frac{3}{2} A_{12}.$$

$$4. \quad 1) I_0 = (\mathcal{E} - U_0)/R = 5 \cdot 10^{-3} \text{ А}; \quad 2) Q_C = C(\mathcal{E} - U_0) = 5 \cdot 10^{-4} \text{ К}; \quad 3) W_R = A_{\mathcal{E}} - W_D - W_C = \frac{C(\mathcal{E} - U_0)^2}{2} = 12,5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

$$5. \quad F_2 = 12 \text{ см}.$$

БИЛЕТ 6

$$1. \quad 1) v_2 = v + v_{2c} = v + \frac{x_0}{2} \sqrt{\frac{K}{3m}}; \quad 2) t = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{3m}{K}}.$$

$$2. \quad V = \frac{\Delta T}{\rho_{\text{в}} g} - V_{\text{л}} = \frac{\Delta T}{\rho_{\text{в}} g} - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}} S \Delta H.$$

$$3. \quad A_{23} = A + \frac{4}{3} A_{12}.$$

$$4. \quad 1) I_0 = \frac{U_R}{R} = \frac{U_0 - U_D}{R} = 40 \text{ мА}; \quad 2) U_{C1} = U_D + I, R = 2 \text{ В}; \quad 3) W_D = W_1 + W_2 = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Дж} (W_1 = U_D C(U_0 - U_{C1}), W_2 = \frac{1}{2} \frac{CU_{C1}^2}{2}).$$

$$5. \quad l = F_2 - \frac{F_1 d}{F_1 - d} = 29 \text{ см}.$$

БИЛЕТ 7

1. Для ответа на первый вопрос рассмотрим систему тел, состоящую из двух муфт. Вдоль горизонтальной оси на данную систему внешние силы не действуют, а по вертикали сумма внешних сил равна нулю. Это означает, что в любой момент времени у данной системы будут сохраняться энергия и импульс. Пусть после отрыва муфты $4m$ от пружины она имеет скорость v_1 , а муфта массой m — скорость v_2 , и обе скорости направлены вдоль скорости v . Запишем законы сохранения

полной энергии и импульса наших муфт для двух моментов времени: когда муфта $4m$ неподвижна, а муфта массой m движется со скоростью v и после отрыва муфты $4m$ от пружины:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{4mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} \quad (1)$$

$$mv = 4mv_1 + mv_2. \quad (2)$$

Совместное решение уравнений (1) и (2) позволяет найти v_1 , равное

$$v_1 = \frac{2}{5}v.$$

Для ответа на второй вопрос удобно перейти в систему координат, связанную с центром масс нашей системы. Очевидно, что эта система будет двигаться со скоростью $v_{\text{цм}} = 1/5v$. В этой системе координат в момент касания пружины с муфтой $4m$ ее скорость будет равна $-1/5v$, а скорость муфты массой m равна $4/5v$. Обозначим длину недеформированной пружины через L . Тогда расстояние от муфты $4m$ до центра масс $l_1 = 1/5L$ а аналогичное расстояние от муфты массой m до центра масс $l_2 = 4/5L$. После соприкосновения пружины с муфтой $4m$ в системе центра масс обе муфты будут двигаться по гармоническому закону с круговой частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{K_1}{4m}} = \sqrt{\frac{K_2}{m}},$$

где K_1 — жесткость пружины длиной l_1 ($K_1 = \frac{LK}{l_1} = 5K$), а K_2 — жесткость пружины длиной l_2 , ($K_2 = \frac{LK}{l_2} = \frac{5}{4}K$). Частота

$$\omega = \sqrt{\frac{5K}{4m}}.$$

Очевидно, что муфта $4m$ оторвется от пружины через время τ , равное половине периода колебаний T ($T = \frac{2\pi}{\omega}$) муфт:

$$\tau = \frac{1}{2}T = \pi \sqrt{\frac{4m}{5K}}.$$

2. Натяжение нити до таяния льда равно разности вытал-

кивающей силы и силы тяжести шарика, замороженного в лед:

$$T_1 = \rho_v g(V_{\text{л}} + V_{\text{ш}}) - \rho_{\text{л}} g V_{\text{л}} - \rho g V_{\text{ш}} = g V_{\text{л}}(\rho_v - \rho_{\text{л}}) + g V_{\text{ш}}(\rho_v - \rho),$$

где $\rho_{\text{л}}$ — плотность льда, $V_{\text{л}}$ — объем льда, а $V_{\text{ш}}$ — объем шарика. После того как лед растаял, новое натяжение нити

$$T_2 = \rho_v g V_{\text{ш}} - \rho g V_{\text{ш}} = g V_{\text{ш}}(\rho_v - \rho).$$

Условие уменьшения натяжения нити в K раз имеет вид

$$\frac{T_1}{T_2} = K = \frac{V_{\text{л}}(\rho_v - \rho_{\text{л}}) + V_{\text{ш}}(\rho_v - \rho)}{V_{\text{ш}}(\rho_v - \rho)}. \quad (3)$$

Уменьшение уровня воды в стакане после того как растаял лед, вызвана положительной разностью плотностей воды и льда $\rho_v - \rho_{\text{л}} > 0$. Масса растаявшего льда $m_{\text{л}} = \rho_{\text{л}} V_{\text{л}}$, объем воды растаявшего льда $V_{\text{в}} = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_v} = \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_v} V_{\text{л}}$. Объем образовавшейся воды меньше объема льда на величину $\Delta V = V_{\text{л}} - V_{\text{в}} = V_{\text{л}}(1 - \rho_{\text{л}}/\rho_v)$. Это приводит к уменьшению уровня воды в стакане:

$$\Delta H \cdot S = \Delta V = V_{\text{л}} \frac{\rho_v - \rho_{\text{л}}}{\rho_v}. \quad (4)$$

Исключая из уравнений (3) и (4) объем льда $V_{\text{л}}$, получим, что объем шарика

$$V_{\text{ш}} = \frac{S \Delta H \rho_v}{(K - 1)(\rho_v - \rho)}.$$

3. На участке 1–2 согласно первого начала термодинамики отводимое тепло

$$Q = \nu C_V(T_1 - T_2) + P_{1,2}(V_1 - V_2),$$

где ν — число молей гелия, C_V — молярная теплоемкость при постоянном объеме, T_1 и T_2 — температуры в точках 1 и 2. $P_{1,2}$ — давление при изобарическом процессе 1–2, V_1 и V_2 — объемы в состояниях 1 и 2. Используя уравнение состояния для идеального газа, можно записать:

$$Q = \nu C_V(T_1 - T_2) + \nu R(T_1 - T_2) = \nu(C_V + R)(T_1 - T_2).$$

Отсюда

$$T_1 - T_2 = Q/\nu(C_V + R). \quad (5)$$

Работа, совершаемая газом на участке 2–3

$$A_{23} = \frac{P_3 + P_2}{2}(V_3 - V_2) = \frac{\nu R(T_3 - T_2)}{2}.$$

Здесь индексы 2, 3 соответствуют состояниям в точках 2 и 3. Из этого уравнения следует, что

$$T_3 - T_2 = 2A_{23}/\nu R. \quad (6)$$

На участке 3–1 газ расширяется в адиабатическом процессе, и работа, совершаемая газом

$$A_{31} = \nu C_V(T_3 - T_1).$$

Для замкнутого цикла изменение внутренней энергии равно нулю. Это позволяет записать:

$$T_3 - T_1 = (T_3 - T_2) - (T_1 - T_2).$$

Используя соотношения (5) и (6), получим, что

$$T_3 - T_1 = \frac{2A_{23}}{\nu R} - \frac{Q}{\nu(C_V + R)}.$$

Тогда $A_{31} = \frac{2C_V}{R} \cdot A_{23} - \frac{C_V}{C_V + R} \cdot Q$. Поскольку $C_V = \frac{3}{2} R$, то

$$A_{31} = 3A_{23} - \frac{3}{5} Q.$$

4. 1) Поскольку ЭДС батареи больше порогового напряжения диода ($\mathcal{E} > U_0$) то начальный ток в цепи $I_0 > 0$. По закону Ома для замкнутой цепи $\mathcal{E} = U_0 + I_0 R$. Сразу после замыкания ключа напряжение на конденсаторе равно нулю. Найдем начальный ток

$$I_0 = \frac{\mathcal{E} - U_0}{R} = 10^{-3} \text{ А}.$$

2) После замыкания ключа конденсатор начнет заряжаться. Он будет заряжаться до напряжения $\mathcal{E} - U_0 = 2 \text{ В}$. После этого ток в цепи будет равен нулю. Заряд, протекший через диод, очевидно, будет равен заряду на конденсаторе: $q = C(\mathcal{E} - U_0)$. Отсюда емкость конденсатора $C = q/(\mathcal{E} - U_0) = 200 \text{ мкФ}$.

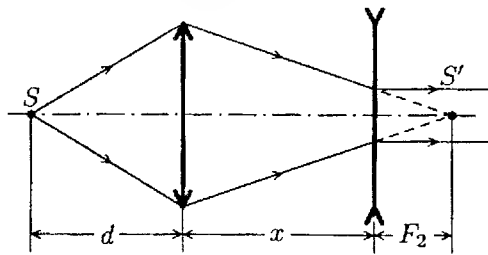
3) Работа, совершенная батареей $A = q\mathcal{E}$. Тепло, которое выделится на диоде

$$W_{\text{д}} = \int I U_0 dt = \int U_0 dq = U_0 q.$$

Конденсатор приобретет энергию $W_C = q^2/2C$. Тепло, выделившееся на резисторе R , будет равно

$$W_R = A - W_q - W_C = q\mathcal{E} - U_0 q - \frac{q(\mathcal{E} - U_0)}{2} = \frac{q(\mathcal{E} - U_0)}{2} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

5. Для того чтобы из системы линз вышел параллельный пучок света, необходимо, чтобы изображение источника S



к задаче 4

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{x + |F_2|} = \frac{1}{F_1}.$$

Отсюда

$$x = \frac{F_1 d}{d - F_1} - |F_2| = 50 \text{ см.}$$

БИЛЕТ 8

1. 1) $v_2 = v + x_0 \sqrt{\frac{5k}{6m}}$; 2) $t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{5m}{6k}}$.

2. $V = S \Delta H \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}} - \frac{\Delta T}{\rho_{\text{в}} g} \frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}}}.$

3. $A = \frac{4}{3} A_{23} - Q_{31}.$

4. 1) $I_0 = \frac{U_0 - U_D}{R} = 40 \text{ мА}$; 2) $U_{C_1} = 2 \text{ В}$;

3) $C = \frac{Q}{U_0 U_D - U_D U_{C_1} + \frac{U_{C_1}^2}{4}} = 50 \text{ мкФ}.$

5. $F_2 = -15 \text{ см.}$

МАТЕМАТИКА

БИЛЕТ 1

1. $(4; 2), (-4; -2).$

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} = 16 + 2xy, \\ \frac{y^3}{x} = 50 - 6xy. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{x^3}{y} = 16 + 2xy, \\ \frac{y^3}{x} = 50 - 6xy. \end{cases} \quad (2)$$

Перемножив почленно уравнения этой системы, получим уравнение

$$13(xy)^2 - 4xy - 800 = 0, \quad (3)$$

которое вместе с одним из уравнений системы (1), (2) образует систему, равносильную системе (1), (2).

Из уравнения (3) находим

$$xy = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 10400}}{13} = \frac{2 \pm 102}{13}, \text{ т.е. } xy = 8 \text{ или } xy = -\frac{100}{3}.$$

Если $xy = 8$, то из уравнения (1) следует, что $x^4 = 2^8$, откуда $x_1 = 4, x_2 = -4$ и тогда $y_1 = 2, y_2 = -2$.

Если $xy = -\frac{100}{3}$, то $x^4 = -\frac{800}{169}$. Это уравнение не имеет действительных корней.

2. $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}, x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$

Решение. Заметим, что

$$\sin 2x \neq 0 \quad (4)$$

и воспользуемся равенствами

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2 7x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 7x}{\cos^2 x} &= \frac{\sin 8x \sin 6x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{16 \cos 4x \sin 2x \cos 2x \sin 6x}{\sin^2 2x}, \\ \cos 2x \sin 6x &= \frac{1}{2}(\sin 8x + \sin 4x) = \frac{1}{2} \sin 4x(1 + 2 \cos 4x) = \\ &= \sin 2x \cos 2x(1 + 2 \cos 4x). \end{aligned}$$

Тогда исходное уравнение можно записать в виде

$$\frac{16 \cos 4x \sin^2 2x \cos 2x(1 + 2 \cos 4x)}{\sin^2 2x} = 16 \cos 4x(1 + 2 \cos 4x). \quad (5)$$

Уравнение (5) при условии (4) равносильно уравнению

$$\cos 4x(1 + 2 \cos 4x) \cos 2x = \cos 4x(1 + 2 \cos 4x), \quad (6)$$

а уравнение (6) равносильно совокупности уравнений

$$\cos 4x = 0, \quad (7)$$

$$\cos 4x = -\frac{1}{2}, \quad (8)$$

$$\cos 2x = 1. \quad (9)$$

Уравнения (7) и (8) имеют корни $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in \mathbb{Z}$ и $x = \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ соответственно, и эти корни удовлетворяют условию (4), а из (9) следует, что $\sin 2x = 0$.

$$3. \quad \frac{1}{8} < x < \frac{1}{2}, x \geq 1, x \neq 2.$$

Решение. Полагая $\log_2 x = t$ и учитывая, что $x > 0$, $\log_4 x^2 = \log_2 x$ (при $x > 0$), преобразуем исходное неравенство к виду

$$\frac{1}{|t+1|-2} \leq \frac{1}{|t|-1}. \quad (10)$$

Рассмотрим три возможных случая: $t \leq -1$, $-1 < t < 0$, $t \geq 0$.

1. При $t \leq -1$ неравенство (10) равносильно каждому из неравенств $\frac{1}{-t-3} \leq \frac{1}{-t-1}$, $\frac{1}{t+3} \geq \frac{1}{t+1}$, $\frac{2}{(t+3)(t+1)} \leq 0$, откуда $-3 < t < 1$, т.е. $-3 < \log_2 x < -1$, $\frac{1}{8} < x < \frac{1}{2}$.

2. Если $-1 < t < 0$, то из (10) следует, что $\frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{-t-1}$ или $\frac{2t}{(t+1)(t-1)} \leq 0$, откуда $t < -1$ или $0 \leq t < 1$. В этом случае неравенство (10) не имеет решений.

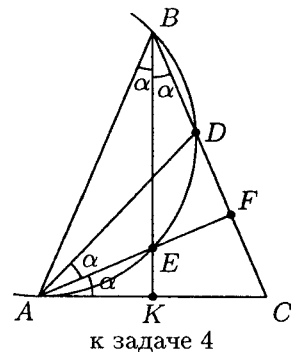
3. При $t \geq 0$ из (10) следует, что $\frac{1}{t-1} \leq \frac{1}{t-1}$. Это неравенство является верным при всех $t \geq 0$, кроме $t = 1$, т.е. при $x \geq 1$ и $x \neq 2$.

$$4. \quad \frac{27\sqrt{2}}{8}.$$

Решение. Пусть BK и AF — высоты в треугольнике ABC (см. рис.) и пусть $\angle ABK = \angle CBK = \alpha$, тогда $\angle FAC =$

$= \alpha$, $\angle DBE = \angle DAE = \alpha$ (эти углы опираются на одну и ту же дугу).

Из равенства прямоугольных треугольников DAF и CAF следует, что $AD = AC$. Найдём AC , пользуясь тем, что треугольники ADC и ABC подобны. Получим $\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{AC}$, откуда $AC^2 = 4 \cdot 9$, $AC = 6$, $\sin \alpha = \frac{KC}{BC} = \frac{1}{3}$, $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Пусть R — радиус окружности, тогда $\frac{AD}{\sin 2\alpha} = 2R$, где $AD = 6$, $\sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}$, и поэтому $R = \frac{27\sqrt{2}}{8}$.



$$5. \quad a < 0, a = 1.$$

Решение. Исходное уравнение равносильно уравнению

$$1 + ax = 2\sqrt{x} \quad (11)$$

при условиях

$$x > 0, x \neq \frac{1}{4}. \quad (12)$$

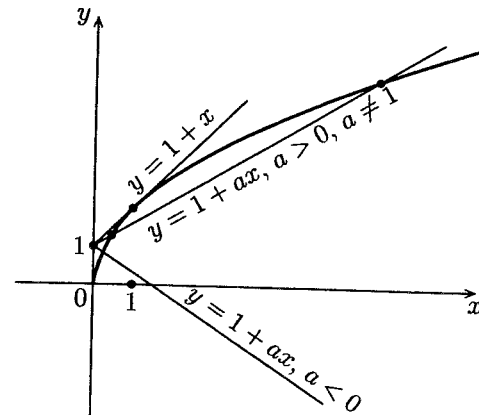
Полагая $\sqrt{x} = t$, запишем уравнение (12) в виде

$$at^2 - 2t + 1 = 0. \quad (13)$$

Если $a = 0$, то $t = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{4}$ и не выполняется второе из условий (12).

Пусть $a \neq 0$, тогда уравнение (13) является квадратным и имеет действительные корни тогда и только тогда, когда $D = 4 - 4a \geq 0$, т.е. при $a \leq 1$.

Если $D = 0$ ($a = 1$), то уравнение (13) имеет единственный положительный корень $t = 1$, а уравнение (11) имеет единственный



к задаче 5

корень $x = 1$, удовлетворяющий условиям (12).

Пусть $D > 0$ ($a < 1$), тогда уравнение (13) имеет два действительных и различных корня. Так как $t = \sqrt{x} \geq 0$, то задача в случае $D > 0$ сводится к нахождению тех значений a , при которых уравнение (13) имеет один положительный корень (другой корень отрицателен), т.е. имеет действительные корни разных знаков. Это условие выполняется тогда и только тогда, когда $D > 0$, $\frac{1}{a} < 0$, т.е. при $a < 1$ и $a < 0$. Итак, в этом случае $a < 0$.

Приведем другое решение этой задачи, используя графики функций $y = 1 + ax$ и $y = 2\sqrt{x}$ при $x \geq 0$ (см. рис.).

Требуется найти все значения a , при которых эти графики имеют единственную общую точку и при этом выполняются условия (12).

Если $a < 0$, то прямая $y = 1 + ax$ пересекает параболу $y = 2\sqrt{x}$ в единственной точке.

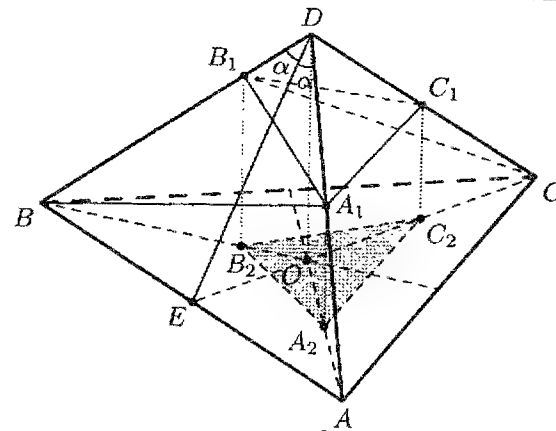
Если $a = 0$, то из уравнения (11) получаем $x = \frac{1}{4}$ (не выполняются условия (12)).

Пусть $a > 0$, тогда прямая $y = 1 + ax$ имеет единственную общую точку с параболой только в том случае, когда она касается параболы. В этом случае уравнение (13) имеет единственный корень ($D = 0$, $a = 1$). При $0 < a < 1$ прямая $y = 1 + ax$ пересекает параболу $y = 2\sqrt{x}$ в двух точках, а при $a > 1$ прямая и параболы не имеют общих точек.

$$6. \quad \frac{84\sqrt{39}}{55}, \frac{1632\sqrt{3}}{275}.$$

Решение. 1) Пусть E — середина AB , $\angle BDE = \angle ADE = \alpha$ (см. рис.), тогда $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $AD = BD = \frac{BE}{\sin \alpha} = 10$. По свойству биссектрисы $\frac{DA_1}{AA_1} = \frac{BD}{AB} = \frac{5}{6}$, откуда $\frac{DA_1}{DA} = \frac{5}{11}$.

Из подобия треугольников BCB_1 и $D BE$ следует, что $\frac{BB_1}{BC} = \frac{BE}{BD}$ или $\frac{BB_1}{12} = \frac{6}{10}$, откуда $BB_1 = \frac{36}{5}$, $DB_1 = \frac{14}{5}$, $\frac{DB_1}{DB} = \frac{7}{25}$.



По условию $DC_1 = CC_1$ и поэтому $\frac{DC_1}{DC} = \frac{1}{2}$.

Найдем высоту DO пирамиды $ABCD$. Так как $BO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$, $BD = 10$, то $DO = \sqrt{BD^2 - BO^2} = 2\sqrt{13}$, а объем пирамиды $ABCD$ равен

$$V = \frac{1}{3} AB^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot DO = 24\sqrt{39}.$$

Пусть V_1 — объем пирамиды $A_1B_1C_1D_1$, $\frac{DA_1}{DA} = p$, $\frac{DB_1}{DB} = q$, $\frac{DC_1}{DC} = r$, тогда $V_1 = Vpqr = 24\sqrt{39} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{7}{25} \cdot \frac{1}{2} = \frac{84\sqrt{39}}{55}$.

2) Вычислим площадь S проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC . Пусть A_2, B_2, C_2 — проекции точек A_1, B_1, C_1 соответственно. Точки A_2, B_2, C_2 лежат на соответствующих высотах треугольника ABC . По теореме Фалеса $\frac{OC_2}{OC} = \frac{DC_1}{DC} = r$, откуда $OC_2 = r \cdot 4\sqrt{3}$. Аналогично, $OA_1 = p \cdot 4\sqrt{3}$, $OB_1 = q \cdot 4\sqrt{3}$. Следовательно, $S = \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{3} (OA_1 \cdot OB_1 + OB_1 \cdot OC_1 + OC_1 \cdot OA_1) = \frac{\sqrt{3}}{4} (4\sqrt{3})^2 \left(\frac{5}{11} \cdot \frac{7}{25} + \frac{7}{25} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{11} \right) = \frac{1632\sqrt{3}}{275}$.

БИЛЕТ 2

1. $(4; 2), (-4; -2)$.
2. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; x = \frac{\pi k}{10}, k \neq 5p, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{Z}$.
3. $0 < x < \frac{1}{4}, \frac{1}{4} < x \leq 1, 4 < x < 16$.
4. $\frac{16\sqrt{6}}{25}$.
5. $a = -\frac{1}{2}, a > 0$.
6. $\frac{3\sqrt{11}}{28}, \frac{20\sqrt{3}}{21}$.

БИЛЕТ 3

1. $(2; 4), (-2; -4)$.
2. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.
3. $\frac{1}{243} < x < \frac{1}{3}, 1 \leq x < 3, x > 3$.
4. $\frac{27\sqrt{2}}{16}$.
5. $a < 0, a = \frac{9}{4}$.
6. $\frac{21\sqrt{39}}{880}, \frac{102\sqrt{3}}{275}$.

БИЛЕТ 4

1. $(2; 4), \left(\frac{256}{375}; -\frac{2048}{3825}\right)$.
2. $x = \frac{\pi n}{3}, n \neq 3k, n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}$.
3. $\frac{1}{9} < x < 1, x \geq 3, x \neq 9$.
4. $\frac{27\sqrt{2}}{4}$.
5. $a = -\frac{3}{4}, a > 1$.
6. $\frac{6\sqrt{11}}{7}, \frac{80\sqrt{3}}{21}$.

БИЛЕТ 5

1. $-2 \leq x < 2 - \sqrt{2}, \frac{4}{3} < x \leq 3$.

Решение. Так как неравенство $|f(x)| > |g(x)|$ равносильно каждому из неравенств $f^2(x) > g^2(x), (f(x)+g(x))(f(x)-g(x)) > 0$, то исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} -x^2 + x + 9 \geq 0, \\ (2x^2 - 8x + 4)(-6x + 8) > 0. \end{cases} \quad (1)$$

Квадратный трехчлен $-x^2 + x + 6$ имеет корни -2 и 3 , корнями квадратного трехчлена $x^2 - 4x + 2$ являются числа $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ и $x_2 = 2 + \sqrt{2}$, а система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} (x+2)(x-3) \leq 0, \\ (x-x_1)\left(x-\frac{4}{3}\right)(x-x_2) < 0, \end{cases} \quad (2) \quad (3)$$

где $-2 < x_1 < \frac{4}{3} < 3 < x_2$ (см. рис.).

Множество E_1 решений неравенства (2) — отрезок $-2 \leq x \leq 3$. Множество E_2 решений неравенства (3), определяемое методом интервалов, является объединением интервалов $x < x_1$ и $\frac{4}{3} < x < x_2$, а множество решений системы (2), (3) — пересечение множеств E_1 и E_2 (см. рис.).

2. $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Решение. Используя формулу $\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta$, преобразуем исходное уравнение к виду

$$\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 4x - \operatorname{tg} 3x = \sin 4x - \operatorname{tg} 2x. \quad (4)$$

Область допустимых значений x для уравнения (4) определяется условиями

$$\cos 2x \neq 0, \quad \cos 3x \neq 0, \quad \cos 4x \neq 0, \quad (5)$$

а при выполнении условий (5) исходное уравнение равносильно уравнению

$$\operatorname{tg} 4x = \sin 4x. \quad (6)$$

Уравнение (6) равносильно совокупности уравнений

$$\sin 4x = 0, \quad (7)$$

$$\cos 4x = 1, \quad (8)$$

причем все корни уравнения (8) содержатся среди корней уравнения (7). Из (7) следует, что либо $\sin x = 0$, и тогда $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, либо $\cos x = 0$ (и тогда $\cos 3x = 0$), либо $\cos 2x = 0$.

$$3. (3; 0), \left(\frac{1459}{27}; -\frac{728}{27}\right).$$

Решение. Исходную систему запишем в виде

$$\begin{cases} [\log_3(x-y) - \log_3(x+2y)][\log_3(x-y) + 2\log_3(x+2y)] = 0, \\ (x-y)(x+2y) = 9. \end{cases} \quad (9)$$

Из (1) следует, что либо

$$x - y = x + 2y, \quad (11)$$

либо

$$(x - y)(x + 2y)^2 = 1. \quad (12)$$

Если выполнены условия

$$x - y > 0, \quad x + 2y > 0, \quad (13)$$

то система (9), (10) равносильна совокупности систем (11), (10) и (12), (10). Первая из этих систем имеет единственное решение (3; 0), удовлетворяющее условиям (13), а вторая система, равносильная системе

$$\begin{cases} x + 2y = \frac{1}{9}, \\ x - y = 81, \end{cases}$$

для которой выполняются условия (13), имеет решение $\left(\frac{1459}{27}; -\frac{728}{27}\right)$.

$$4. \sqrt{\frac{10}{3}}, \sqrt{\frac{15}{2}}.$$

Решение. Заметим, что $AE = BE$ и $AE = DE$, так как касательные, проведенные к окружности из одной точки, равны. Поэтому $BD = 2BE = 2\sqrt{5}$ (см. рис.). Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей C_1 и C_2 , $O_1B = O_1A = x$, $O_2F = O_2A = y$, $AB = t$.

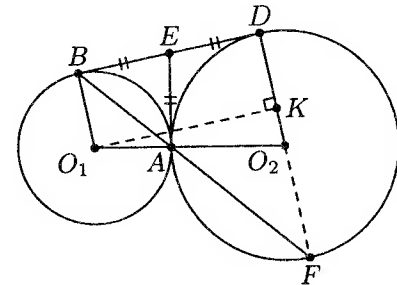
По теореме о касательной и секущей

$$AB(AB + AF) = BD^2, \text{ т.е.}$$

$t(t + 3\sqrt{2}) = 20$ или $t^2 + 3\sqrt{2}t - 20 = 0$, откуда $t_1 = -5\sqrt{2}$, $t_2 = 2\sqrt{2}$, т.е. $AB = 2\sqrt{2}$.

Из подобия треугольников O_1AB и O_2AF следует, что $\frac{x}{t} = \frac{y}{3\sqrt{2}}$, откуда $x = \frac{2}{3}y$.

Для получения еще одного уравнения, связывающего x и y , воспользуемся теоремой Пифагора в треугольнике O_1O_2K , где K — основание перпендикуляра, опущенного из точки O_1 на прямую DO_2 . Получим $O_1K = BD = \sqrt{(x+y)^2 - (y-x)^2} = 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{5}$, откуда $xy = 5$, где $x = \frac{2}{3}y$. Следовательно, $y^2 = \frac{15}{2}$, $y = \sqrt{\frac{15}{2}}$, $x = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{15}{2}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$.



к задаче 4

З а м е ч а н и е. Можно показать, что точки D , O_2 и F лежат на одной прямой и вместо теоремы о касательной и секущей применить теорему Пифагора к треугольнику BDF .

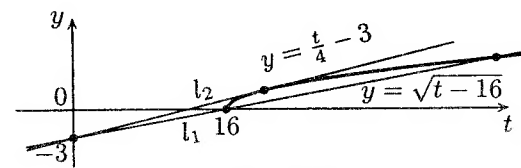
$$5. 0 < a < \frac{3}{16}, a = \frac{1}{4}.$$

Решение. Полагая $x + 7 = t$, получим уравнение

$$\sqrt{t-16} = at - 3. \quad (14)$$

Требуется найти все значения a , при которых графики функций $y = \sqrt{t-16}$ и $y = at - 3$ имеют при $t \geq 16$ единственную общую точку (см. рис.).

Если $a \leq 0$, то прямая $y = at - 3$ не имеет общих точек с параболой $y = \sqrt{t-16}$. Заметим, что угловой коэффициент прямой $y =$



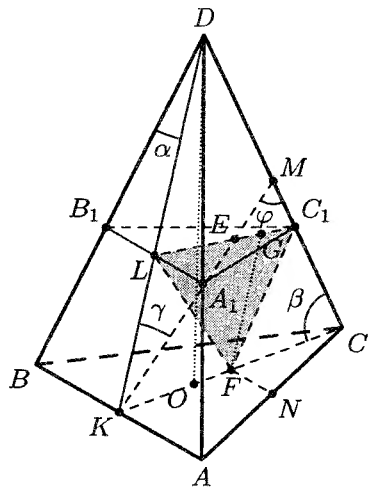
к задаче 5

$= at - 3$ равен a . Найдем угловые коэффициенты a_1 и a_2 прямых l_1 и l_2 (обе задаются уравнением вида $y = at - 3$), первая из которых проходит через точку $(16; 0)$, а вторая касается параболы $y = \sqrt{t - 16}$. Подставляя в уравнение $y = 3 - at$ значения $t = 16$, $y = 0$, находим $a_1 = \frac{3}{16}$.

Число a_2 является тем значением a , при котором уравнение (14) имеет единственный корень $t_1 > 16$. Возводя обе части (14) в квадрат, получаем уравнение $a^2 t^2 - (6a + 1)t + 25 = 0$, дискриминант которого $D = (6a + 1)^2 - (10a)^2$. Уравнение $D = 0$ имеет единственный положительный корень $a = \frac{1}{4}$. Следовательно,

$a_2 = \frac{1}{4}$. Если $\frac{3}{16} \leq a < \frac{1}{4}$, то прямая $y = at - 3$ и парабола $y = \sqrt{t - 16}$ имеют две общих точки, а при $a > \frac{1}{4}$ они не имеют общих точек.

$$6. \frac{A_1 D}{AD} = \frac{B_1 D}{BD} = \frac{7}{12}, \frac{C_1 D}{CD} = \frac{21}{32}; \frac{49\sqrt{65}}{576}; \frac{13}{2\sqrt{10}}.$$



к задаче 6

Решение. Пусть $\angle KDA = \alpha$, $\angle KCD = \beta$, $\angle DKM = \gamma$, $\angle KMC = \varphi$ (см. рис.). Так как $\sin \alpha = \frac{1}{6}$, $AK = 1$, то $AD = BD = CD = 6$, $DM = 3$, $KD = \sqrt{36 - 1} = \sqrt{35}$. Если O — центр треугольника ABC , то $OC = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $\cos \beta = \frac{OC}{DC} = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, $\sin \beta = \frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{3}}$.

Применяя теорему косинусов в треугольниках KMC и KDM , получаем

$$1. KM^2 = KC^2 + MC^2 - 2KC \cdot MC \cdot \cos \beta = 3 + 9 - 2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}} = 10, \text{ откуда } KM = \sqrt{10}, KE = \frac{3}{4} KM = \frac{3\sqrt{10}}{4}, ME =$$

$$= \frac{1}{4} KM = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

$$2. \cos \varphi = \frac{KM^2 + MC^2 - KC^2}{2KM \cdot MC} = \frac{10 + 9 - 3}{6\sqrt{10}} = \frac{8}{3\sqrt{10}}, \text{ откуда}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1} = \frac{\sqrt{26}}{8}.$$

$$3. \cos \gamma = \frac{KD^2 + KM^2 - DM^2}{2KD \cdot KM} = \frac{35 + 10 - 9}{2\sqrt{35} \cdot \sqrt{10}} = \frac{9}{5} \sqrt{\frac{2}{7}}, \text{ откуда}$$

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{\sqrt{13}}{9\sqrt{2}}.$$

Пусть A_1, B_1 — точки пересечения плоскости \mathcal{P} с ребрами AD и BD . Так как $KM \perp AB$ ($BM = AM$) и $KM \perp A_1B_1$ (KM — перпендикуляр к плоскости \mathcal{P}), то $A_1B_1 \parallel AB$. Если C_1 — точка пересечения плоскости \mathcal{P} и прямой DC , то $A_1B_1C_1$ — равнобедренный треугольник ($A_1C_1 = B_1C_1$). Покажем, что точка C_1 лежит на ребре DC , а не на его продолжении за точку C_1 , вычислив длину DC_1 . Пусть L — середина A_1B_1 , тогда $C_1L \perp KM$, так как KM — перпендикуляр к плоскости \mathcal{P} . Из прямоугольных треугольников LEK и MEC_1 находим

$$1. LK = \frac{KE}{\cos \gamma} = \frac{3\sqrt{10}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{7}}{9\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{35}}{12} = \frac{5}{12} KD, \text{ откуда } DL = \frac{7}{12} KD, LE = KE \cdot \operatorname{tg} \gamma = \frac{3\sqrt{10}}{4} \cdot \frac{\sqrt{13}}{9\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{65}}{12};$$

$$2. MC_1 = \frac{ME}{\cos \varphi} = \frac{\sqrt{10}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{8} = \frac{15}{16}, \text{ откуда следует, что точка } C_1 \text{ лежит на ребре } CD, \text{ причем } DC_1 = 3 + \frac{15}{16} = \frac{63}{16}, \frac{DC_1}{DC} = \frac{21}{32}.$$

Таким образом, в сечении пирамиды плоскостью \mathcal{P} получается равнобедренный треугольник $A_1B_1C_1$. Далее находим $EC_1 = ME \cdot \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{10}}{4} \cdot \frac{\sqrt{26}}{8} = \frac{\sqrt{65}}{16}$. Из подобия треугольников DLA_1 и DKA следует, что

$$\frac{A_1L}{AK} = \frac{DA_1}{DA} = \frac{DL}{DK} = \frac{7}{12},$$

откуда $A_1L = \frac{7}{12}$.

Пусть S — площадь треугольника $A_1B_1C_1$, тогда

$$S = A_1L \cdot LC_1 = A_1L(LE + EC_1) = \frac{7}{12} \left(\frac{\sqrt{65}}{12} + \frac{\sqrt{65}}{16} \right) = \frac{49\sqrt{65}}{576}.$$

Найдем, наконец, расстояние d от точки N до плоскости \mathcal{P} . Проведем через точку N прямую, параллельную AB и пересекающую KC в точке F (F — середина KC). Так как $NF \parallel AB$, а $AB \parallel A_1B_1$, то расстояние от точки F до плоскости \mathcal{P} равно d .

Заметим, что высота FG , проведенная из точки F в треугольнике FLC_1 , равна d ($FG \perp LC_1$ и $FG \perp A_1B_1$).

Для нахождения d достаточно найти площадь S_0 треугольника FLC_1 . Пусть S_1, S_2, S_3, S_4 — площади треугольников KDC, LKF, FCC_1 и DLC_1 соответственно. Тогда

$$S_1 = \frac{1}{2} DC \cdot KC \cdot \sin \beta = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{26}}{3\sqrt{3}} = \sqrt{26},$$

$$S_2 = \frac{5}{12} \cdot \frac{S_1}{2} = \frac{5}{24} S_1, \quad S_3 = \frac{11}{32} \cdot \frac{S_1}{2} = \frac{11}{64} S_1, \quad S_4 = pqS_1,$$

где $p = \frac{DL}{DK} = \frac{7}{12}$, $q = \frac{DC_1}{DC} = \frac{21}{32}$, т.е. $S_4 = \frac{49}{128} S_1$. Следова-

тельно, $S_0 = S_1 \left(1 - \frac{5}{24} - \frac{11}{64} - \frac{49}{128} \right) = S_1 \frac{13 \cdot 7}{64 \cdot 6}$,

$$d = \frac{2S_0}{LC_1} = \frac{13}{2\sqrt{10}}.$$

БИЛЕТ 6

$$1. \quad 1 \leq x < 2, \quad 2 + \sqrt{3} < x \leq 6.$$

$$2. \quad x = \frac{\pi n}{8}, \quad n \neq 2 + 4k, \quad n \neq 4 + 8k, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \quad (2; 0), \quad \left(\frac{43}{4}; \frac{21}{4} \right).$$

$$4. \quad 2\sqrt{5}, \quad \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$5. \quad 0 \leq a \leq \frac{3}{16}, \quad a = -\frac{1}{16}.$$

$$6. \quad \frac{A_1D}{AD} = \frac{B_1D}{BD} = \frac{5}{6}, \quad \frac{C_1D}{CD} = \frac{5}{11}, \quad \frac{25\sqrt{23}}{99}, \quad \frac{7}{8}.$$

БИЛЕТ 7

$$1. \quad -5 \leq x < -2 - \sqrt{2}, \quad -\frac{4}{3} < x \leq -1.$$

$$2. \quad x = \frac{\pi n}{8}, \quad n \neq 2 + 4k, \quad n \neq 4 + 8k, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \quad (2; 0), \quad \left(\frac{11}{2}; \frac{21}{4} \right).$$

$$4. \quad \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad 3\sqrt{2}.$$

$$5. \quad a = \frac{1}{2}, \quad 0 < a < \frac{2}{5}.$$

$$6. \quad \frac{A_1D}{AD} = \frac{B_1D}{BD} = \frac{17}{27}, \quad \frac{C_1D}{CD} = \frac{17}{24}, \quad \left(\frac{17}{27} \right)^2 \sqrt{65}, \quad \frac{34}{3\sqrt{10}}.$$

БИЛЕТ 8

$$1. \quad -3 \leq x < -2, \quad -2 + \sqrt{3} < x \leq 1.$$

$$2. \quad x = \frac{\pi n}{6}, \quad n \neq 3 + 6k, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \quad (3; 0), \quad \left(\frac{731}{27}; -\frac{728}{27} \right).$$

$$4. \quad \sqrt{3}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$5. \quad 0 \leq a \leq \frac{2}{5}, \quad a = -\frac{1}{10}.$$

$$6. \quad \frac{A_1D}{AD} = \frac{B_1D}{BD} = \frac{13}{18}, \quad \frac{C_1D}{CD} = \frac{13}{33}, \quad \left(\frac{26}{9} \right)^2 \frac{\sqrt{23}}{11}, \quad \frac{25}{12}.$$